E.N.S.I. CHIMIE CENTRE 1982

TB MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME PARTIE

DURÉE : 2 heures

ATTENTION : La première et la deuxième partie de l'épreuve de mathématiques sont distribuées ensemble au début de l'épreuve.

Les candidats doivent rédiger chaque partie sur deux copies différentes.

N.B. — *Les candidats pourront utiliser tout résultat fourni par l'énoncé et qu'ils n'ont pu démontrer, en le précisant chaque fois.*

Dans tout le problème, on note E l'espace vectoriel réel des fonctions $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, continues, et telles que

$$f(0) = 0 = f(2\pi)$$

On rappelle qu'on définit un produit scalaire sur E en posant pour $(f, g) \in E^2$

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t) \cdot g(t)\, dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n l'élément de E défini par $g_n(x) = \sin \frac{nx}{2}$.

Soit enfin $K : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} K(x, y) = y(2\pi - x) & \text{si } y \leqslant x \\ K(x, y) = x(2\pi - y) & \text{si } y > x \end{cases}$$

1°*a.* Rappeler l'expression de la norme associée au produit scalaire choisi, ainsi que celle de l'inégalité de Schwarz (aucune démonstration n'est demandée).

b. Calculer $(g_n|g_p)$ pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

2°*a.* Montrer que K est continue et vérifie $K(y, x) = K(x, y)$.

b. Pour $x_0 \in [0, 2\pi]$, on définit $h_{x_0} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ par $h_{x_0}(y) = K(x_0, y)$.

Montrer que $h_{x_0} \in E$ et admet en tout point de $[0, 2\pi]$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

3°*a.* Calculer $\int_0^{2\pi} K(x, y)\, dy = I_1$.

b. Calculer $\int_0^{2\pi} [K(x, y)]^2\, dy = I_2$.

4°. A toute fonction f de E, on associe la fonction $T(f) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ par la relation

$$T(f)(x) = \int_0^{2\pi} K(x, y) f(y)\, dy$$

a. Montrer que $T(f)$ appartient à E.

b. Calculer $T(g_n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

c. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$(\forall f \in E) \; \| T(f) \| \leqslant M \| f \|$$

On pourra utiliser 1°*a.* Cette question n'est pas nécessaire à la suite du problème.

5° Montrer que pour toute $f \in E$, la fonction $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que l'on a $[T(f)]'' = -2\pi f$.

.../...

6° Soit λ un réel non nul. On se propose de discuter et résoudre sur E l'équation

(1) $$T(f) = \lambda \cdot f$$

a. Montrer que tout élément f de E qui vérifie (1) est nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie une équation différentielle du second ordre (H) que l'on écrira.

b. Montrer que si λ est négatif (on pourra poser $\lambda = -\omega^2$), (H) n'admet sur E que la solution $f = 0$.

c. Montrer que si λ est positif, l'équation (H) n'admet de solution non nulle que si λ est de la forme

$$\lambda_n = \frac{8\pi}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une solution f_n et une seule telle que

$$T(f_n) = \lambda_n f_n \; ; \qquad \| f_n \| = 1 \; ; \qquad f'_n(0) > 0$$

On explicitera f_n.

7° Soit $x_0 \in [0, 2\pi]$. On note φ_{x_0} la fonction réelle, impaire, périodique de période 2π et telle que

$$(\forall\, t \in [0, \pi])\ \varphi_{x_0}(t) = K(x_0, 2t)$$

Montrer que φ_{x_0} est développable en série de Fourier et écrire ce développement.

8° En déduire qu'il existe un réel k tel que $(\forall (x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$

(2) $$K(x, y) = k \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda_n f_n(x) f_n(y)$$

9° b_n est le terme général d'une série réelle absolument convergente. On définit g sur $[0, 2\pi]$ par

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n f_n(x)$$

D'autre part, μ étant un réel non nul qui n'est pas de la forme $\mu = \frac{8\pi}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, on se propose de discuter et résoudre sur E l'équation

(3) $$\mu f - T(f) = \mu \cdot g$$

a. Montrer que $g \in E$ (on montrera la convergence normale de la série définissant g). Calculer $T(g)$ (tous les calculs effectués devront être justifiés).

b. Montrer que (3) admet au plus une solution dans E.

c. On pose $f = g + \varphi$. Montrer que φ appartient à E et que

(4) $$\varphi = \frac{1}{\mu}[T(g) + T(\varphi)]$$

Utilisant la relation (2), montrer que $T(\varphi)$ est de la forme

$$T(\varphi)(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} C_n f_n(x)$$

où la série de terme général C_n est absolument convergente.

En déduire que φ admet un développement de la forme

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \rho_n \cdot f_n(x)$$

où ρ_n est le terme général d'une série absolument convergente.

d. Conclure. On montrera l'existence d'une solution f de (3), de la forme $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \alpha_n f_n$ où la série de terme général α_n est absolument convergente.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail